1 Truque de Casimir: o cálculo de $\langle|\mathscr{M}|^2\rangle$

Conhecendo as regras de Feynman já podemos calcular $\langle|\mathscr{M}|^2\rangle$. A média é feita sobre todos os estados iniciais das partículas envolvidas no espalhamento/decaimento.

Essa técnica é conhecida como truque de Casimir e para aplicá-la precisamos conhecer a *completeza* dos espinores u, v e dos quadrivetores de polarização ϵ_μ.

$$\sum_{s=1,2} \bar{u}^{(s)} u^{(s)} = \not{p} + m \tag{1}$$

$$\sum_{s=1,2} \bar{v}^{(s)} v^{(s)} = \not{p} - m \tag{2}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{4} \epsilon_\lambda^\mu \epsilon_\lambda^\nu = -g^{\mu\nu} \tag{3}$$

Por exemplo, utilizando a regra de Feynman para o espalhamento elétron-múon da figura 1 tem-se:

$$\mathscr{M} = -\tfrac{e^2}{(p_1-p_3)^2}[\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)] \tag{4}$$

$$|\mathscr{M}|^2 = \tfrac{e^4}{(p_1-p_3)^4}[\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)][\bar{u}(3)\gamma^\nu u(1)]^*[\bar{u}(4)\gamma_\nu u(2)]^* \tag{5}$$

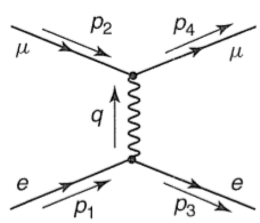

Figura 1: *Diagrama de primeira ordem do espalhamento elétron-múon.*

Analisando (5) nota-se que lidaremos com quantidades da forma:

$$G = [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^*$$

onde a e b são os representantes apropriados de quadrimomento e spin.

Percebendo que $[\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = [\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^\dagger$, utilizando a propriedade de completeza e manipulando álgebra, é possível mostrar que:

$$\sum_{\text{todos os spins}} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = \mathrm{Tr}[\Gamma_1(\not{p}_b + m_b)\bar{\Gamma}_2(\not{p}_a + m_a)] \tag{6}$$

onde $\bar{\Gamma}_2 = \gamma^0 \Gamma_2^\dagger \gamma^0$.

Esse é o truque de Casimir. Repare que não é preciso conhecer os espinores u e v para calcular $\langle|\mathscr{M}|^2\rangle$. No caso do elétron-múon, $\Gamma_1 = \gamma^\mu$, $\Gamma_2 = \gamma^\nu$ e $\bar{\Gamma}_2 = \gamma^0\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\nu$, então por (5) e (6) conclui-se:

$$\langle|\mathscr{M}|^2\rangle = \frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4}\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m)] \times \mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_2 + M)\gamma_\nu(\not{p}_4 + M)] \quad (7)$$

Embora (7) não aparente ter simplificado (5), existem muitas propriedades do traço que facilitam a álgebra, mas estes cálculos podem ser bastante simplificados com o uso do pacote `Feyncalc` do `Mathematica`.