

1 Regras de Feynman para QED

Decaimentos e espalhamentos que geram duas partículas no estado final são descritas da seguinte maneira no CM:

$$\Gamma = \frac{|\vec{p}_f|}{32\pi^2 s} \int \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle d\Omega \quad (1)$$

onde s é a energia do centro de massa; e

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle |\vec{p}_f|}{64\pi^2 s |\vec{p}_i|} \quad (2)$$

essas expressões são válidas quando adotamos o CM como referencial, mas o resultado é invariante de Lorentz.

Tanto na equação (1) quanto na (2) é necessário saber o valor de $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ para obter as medidas de maior interesse (σ e Γ). Por isso, existe um método desenvolvido por Feynman para determinar a amplitude de um espalhamento. Primeiro devemos desenhar o diagrama de Feynman que corresponde ao espalhamento em questão, depois executamos os seguintes passos:

- **Notação:** A cada linha externa associe um momento p_n , e a cada linha interna associe um momento q_n .

- **Linhas externas:** Estabeleça a seguinte legenda:

$$\begin{aligned} \text{férmions} & \begin{cases} \text{“entrando”}: u \\ \text{“saindo”}: \bar{u} \end{cases} \\ \text{antiférmions} & \begin{cases} \text{“entrando”}: \bar{v} \\ \text{“saindo”}: v \end{cases} \\ \text{fótons} & \begin{cases} \text{“entrando”}: \epsilon_\mu \\ \text{“saindo”}: \epsilon_\mu^* \end{cases} \end{aligned}$$

- **Fatores de vértice:** Cada vértice contribui com um fator $ie\gamma^\mu$, onde $e = \sqrt{4\pi\alpha}$ é a constante de acoplamento da interação eletromagnética e γ^μ é uma matriz de Dirac.

- **Propagadores:** Cada linha interna contribui com um fator:

$$\begin{aligned} \text{férmions e antiférmions: } & \frac{i(\gamma^\mu q_\mu + mc)}{q^2 - (mc)^2} \\ \text{fótons: } & \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \end{aligned}$$

- **Conservação de momento e energia:** Para cada vértice escreva a função delta de Dirac na forma

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3)$$

onde os k 's são os quadrimomentos que formam o vértice (positivos para partículas "entrando" e negativos para partículas "saindo").

- *Integrar sobre os momenta internos:* Para cada momento interno q escreve-se o fator $\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ e integra-se.
- *Cancelar a função Delta remanescente:* No resultado final restará um fator $(2\pi)^4\delta(p_1 + p_2 + \dots - p_n)$ que corresponde à conservação do momento e da energia do processo. Cancele esse fator e multiplique por i . O resultado é a amplitude \mathcal{M} .
- *Somar as amplitudes:* Caso o processo seja representado por mais de um diagrama, a amplitude total corresponderá à soma das amplitudes individuais dos diagramas.
- *Antisimetrização:* Se dois diagramas de um mesmo processo diferem por uma permutação de férmions, então as amplitudes desses diagramas em questão devem ser subtraídas.

Essa é a regra de Feynman para determinação de \mathcal{M} na QED. Os fatores γ correspondem às matrizes de Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

onde 1 denota a matriz identidade 2×2 , 0 é a matriz nula 2×2 , e σ^i ($i = 1, 2, 3$) é uma *matriz de Pauli*.

As matrizes (3) têm essa configuração porque a partir da relação relativística de energia-momento temos:

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu - (mc)^2 = 0 &\Rightarrow (\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0 \\ p_\mu p^\mu - (mc)^2 &= \beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - mc(\beta^\kappa - \gamma^\kappa)p_\kappa - (mc)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

mas não há termos lineares, então $\beta^\kappa = \gamma^\kappa$, e uma maneira de se ter $p^\mu p_\mu = \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda$ é admitindo que γ^μ seja dada por (3).

Substituindo $p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu$ e escolhendo $\gamma^\lambda p_\lambda - mc = 0$ em (4), concluiu-se:

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0 \quad (5)$$

que é a *equação de Dirac*, utilizada para descrever partículas relativísticas de spin 1/2 (férmions). O elemento ψ na equação (5) é um espinor de Dirac e, apesar de possuir 4 componentes, não é um quadrivetor. Na legenda estabelecida acima para as linhas externas do diagrama de Feynman, u e v são espinores de Dirac, enquanto ϵ_μ são vetores de polarização, essenciais na representação de elétrons, pósitrons e fótons como função de onda. Elétrons e pósitrons (partículas de spin 1/2) são soluções de (5).

Elétron	Pósitron
$\psi(x) = ae^{-(i/\hbar)p \cdot x} u^{(s)}(p)$	$\psi(x) = ae^{(i/\hbar)p \cdot x} v^{(s)}(p)$

Fóton

$$A_\mu(x) = ae^{-(i/\hbar)p \cdot x} \epsilon_\mu^{(s)}$$

onde $s = 1, 2$ para os dois estados de spin (ou polarização) e p é o quadrimomento.

Partículas de spin 0 são descritas pela *equação de Klein-Gordon*:

$$\hbar \partial^\mu \partial_\mu \psi + (mc)^2 \psi = 0 \quad (6)$$

Para se chegar em (6) basta partir da relação relativística $p_\mu p^\mu - (mc)^2 = 0$ e substituir $p_\mu \rightarrow i\hbar \partial_\mu$.

Para não carregar muitos índices ao longo dos cálculos de amplitude adotamos a seguinte notação:

$$a^\mu \gamma_\mu = \not{a}$$

Dessa maneira, aplicando a regra de Feynman aos diagramas do espalhamento Compton de primeira ordem, representados na figura 1, obtemos:

$$\mathcal{M}_1 = \frac{e^2}{(p_1 - p_3)^2 - (mc)^2} [\bar{u}(4) \not{\epsilon}(2) (\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc) \not{\epsilon}(3)^* u(1)] \quad (7)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{e^2}{(p_1 + p_2)^2 - (mc)^2} [\bar{u}(4) \not{\epsilon}(3) (\not{p}_1 + \not{p}_2 + mc) \not{\epsilon}(3)^* u(1)] \quad (8)$$

sendo a amplitude total igual a $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$.

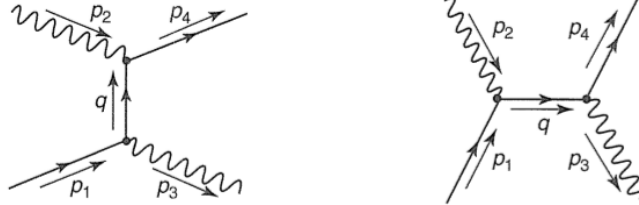


Figura 1: Os dois diagramas de primeira ordem do espalhamento Compton.

Portanto, desde que se especifiquem os quadrimomentos p , os spins dos elétrons e as polarizações dos fótons, basta encontrar os espinores u e ϵ e substituir em (7) e (8) para encontrar a amplitude do espalhamento e, a partir deste, usar (1) e (2).

2 Regras de Feynman para QCD

A partir daqui vamos adotar o sistema de unidades naturais, isto é, $\hbar = c = 1$, pois simplifica a notação.

Para calcular a amplitude de espalhamento na QCD precisamos conhecer as regras de Feynman dessa teoria.

Os termos dos possíveis vértices que aparecem no cálculo de $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ são:

- **glúon-quark:** $ig\gamma^\mu t^a$
- **glúon-glúon-glúon:** $gf^{abc}[g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$ onde p, q e k são os quadrimomentos dos glúons (por convenção, considera-se que todos os quadrimomentos apontam para dentro do vértice) e f^{abc} são as *constantes de estrutura* da álgebra de $SU(3)_c$:

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = if^{abc} \frac{\lambda_c}{2} \quad (9)$$

onde $\lambda_i/2$ são os geradores de $SU(3)$, as matrizes de Gell-Mann.

•

$$\begin{aligned} \text{glúon-glúon-glúon-glúon:} \quad & -ig^2 \quad [\quad f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ & + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ & + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \quad] \end{aligned}$$

O propagador é obtido pela identificação da equação de Green no espaço de fases (no gauge de Feynman):

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(x') \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{G}(k) e^{-ik \cdot (x-x')} \quad (10)$$

para a QCD:

$$\tilde{G}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \delta^{ab} \quad (11)$$

A partir desses resultados é possível obter o $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ para então calcular a largura de decaimento Γ e a seção de choque σ a partir das expressões gerais (1) e (2).

3 Regras de Feynman para GWS

Reescrevendo as interações carregadas em função de $j_\mu^\pm = j_\mu^1 \pm ij_\mu^2$ teremos:

$$-ig(j_\mu^1(W^1)^\mu + j_\mu^2(W^2)^\mu) = \frac{-ig}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ j^{+\mu} + W_\mu^- j^{-\mu}) \quad (12)$$

e usando o fato que $j_\mu^+ = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \sigma^+ \chi_L$ e $j_\mu^- = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \sigma^- \chi_L$, ficamos com:

$$\begin{aligned} & \frac{-ig}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ \bar{\chi}_L \gamma^\mu \sigma^+ \chi_L + W_\mu^- \bar{\chi}_L \gamma^\mu \sigma^- \chi_L) \\ & \frac{-ig}{2\sqrt{2}} (W_\mu^+ \bar{\chi} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \chi + W_\mu^- \bar{\chi} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \chi) \\ & \bar{\chi} \left(\frac{-ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \right) \chi W_\mu^+ + \bar{\chi} \left(\frac{-ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \right) \chi W_\mu^- \quad (13) \end{aligned}$$

então:

- **fator de vértice das interações fracas carregadas:** $\frac{-ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$

Quanto às interações fracas neutras, o fator de vértice é obtido substituindo as já conhecidas equações:

$$j_\mu^{em} = \bar{\psi} \gamma_\mu Q \psi \quad (14)$$

e

$$j_\mu^3 \equiv \bar{\chi}_L \gamma_\mu \frac{\sigma_3}{2} \chi_L = \frac{1}{2} (\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \bar{e}_L \gamma_\mu e_L) \quad (15)$$

em

$$-i(g \cos \theta_w j_\mu^3 - g' \sin \theta_w j_\mu^Y) Z^\mu = -i \frac{g}{\cos \theta_w} (j_\mu^3 - \sin^2 \theta_w j_\mu^{em}) Z^\mu \quad (16)$$

$$\frac{-ig}{\cos \theta_w} (j_\mu^3 - \sin^2 \theta_w j_\mu^{em}) Z^\mu = \frac{-ig}{\cos \theta_w} \bar{\chi} \gamma_\mu \left(\frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \frac{\sigma_3}{2} - \sin^2 \theta_w Q \right) \chi Z^\mu \quad (17)$$

ou seja,

- **fator de vértice das interações fracas neutras:** $\frac{-ig}{\cos \theta_w} \gamma_\mu \left(\frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \frac{\sigma_3}{2} - \sin^2 \theta_w Q \right)$

Por fim, o fator do propagador é dado por:

$$\text{propagador: } \frac{i(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / M^2)}{M^2 - k^2} \quad (18)$$