1 Largura de decaimento Γ

O *tempo de vida* (τ) é uma quantidade de enorme interesse entre os físicos, porém é impossível calculá-la a partir de uma única partícula, então o que se faz é determinar o tempo de vida *médio* a partir de uma amostra contendo N_0 quantidades de uma mesma partícula. A probabilidade de decaimento por unidade de tempo denomina-se *largura de decaimento* (Γ) e, a partir dela, é possível determinar a quantidade de partículas de uma amostra em função do tempo:

$$N(t + \mathrm{d}t) - N(t) = \mathrm{d}N(t) = -N(t)\Gamma\mathrm{d}t$$

o que nos leva a:

$$\begin{aligned}
\int_{N(0)}^{N(t)} \frac{\mathrm{d}N'(t)}{N'(t)} &= -\int_0^t \Gamma\mathrm{d}t' \\
\ln\left(\frac{N(t)}{N(0)}\right) &= -\Gamma t \\
N(t) &= N_0 e^{-\Gamma t} \qquad (1)
\end{aligned}$$

A fração de decaimento, em relação à amostra inicial, entre os períodos t e $t + \mathrm{d}t$ é:

$$\frac{N(t) - N(t + \mathrm{d}t)}{N_0} = e^{-\Gamma t}\Gamma\mathrm{d}t$$

Logo, a probabilidade de uma partícula escolhida ao acaso na amostra inicial decair entre os instantes t e $t + \mathrm{d}t$ é:

$$p(t) = e^{-\Gamma t}\Gamma$$

de modo que o tempo de vida médio fica:

$$\begin{aligned}
\tau &= \langle t \rangle = \int_0^\infty t e^{-\Gamma t}\Gamma\mathrm{d}t \\
&= \Gamma\left(t\,\frac{e^{-\Gamma t}}{-\Gamma}\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-\Gamma t}}{\Gamma}\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Naturalmente, uma mesma partícula pode apresentar múltiplas larguras de decaimento, dado que pode decair de diferentes formas, chamamos estas de larguras parciais. Um exemplo seria o π^+, cujos decaimentos conhecidos são:

$$\begin{aligned}
\pi^+ &\to e^+ + \nu_e \\
\pi^+ &\to \mu^+ + \nu_\mu \\
\pi^+ &\to \mu^+ + \nu_\mu + \gamma \\
\pi^+ &\to e^+ + \nu_e + \pi^0
\end{aligned}$$

Nesses casos, a largura de decaimento e o tempo de vida ficam:

$$\Gamma_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i \tag{3}$$

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_{tot}} \tag{4}$$

onde n é o número de decaimentos possíveis.

A *meia-vida* ($t_{1/2}$) é facilmente calculada:

$$N(t_{1/2}) = \tfrac{1}{2}N(0) = N(0)e^{-\Gamma t_{1/2}}$$
$$\Downarrow$$
$$-\Gamma t_{1/2} = \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow t_{1/2} = \tfrac{1}{\Gamma}\ln 2 = \tau \ln 2 \tag{5}$$

Portanto, a partir da largura de decaimento é possível determinar o tempo de vida e a meia-vida de uma partícula, por isso, é essencial que exista um modelo que permita obter uma fórmula para Γ. A partir da QFT, pôde-se determinar que uma partícula **1** decaindo em **n** outras apresenta a seguinte largura de decaimento:

$$\Gamma = \frac{S}{2\hbar m_1}\int |\mathscr{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4\left(p_1 - \sum_{i=2}^{n} p_i\right) \times \prod_{j=2}^{n} 2\pi\delta(p_j^2 - m_j^2c^2)\theta(p_j^0)\frac{\mathrm{d}^4 p_j}{(2\pi)^4} \tag{6}$$

onde $\mathscr{M}(p_1, \cdots, p_n)$ é a *amplitude* do processo, p_j é o quadrivetor momento-energia e S é um fator de correção estatística que evita a contagem repetida de partículas idênticas obtidas no decaimento:

$$S = \prod_{i=1}^{l}\frac{1}{N_i!}$$

onde l é o número de partículas distintas formadas no decaimento e N_i é a quantidade de cada uma dessas diferentes partículas. Então, se não houver partículas idênticas $S = 1$; enquanto que o processo $A \to B+B+C+C+C+D$ tem $S = (1/2!)(1/3!)$.

A equação (6) revela três restrições cinemáticas:

- a função $\delta(p_j^2 - m_j^2c^2)$ mostra que todas as partículas (reais) que saem são *on shell*, ou seja, obedecem a relação relativística entre momento e energia $E_j^2 - \vec{p_j}^{\,2}c^2 = m_j^2c^4$.
- a função *heaviside* $\theta(p_j^0)$ garante que $p_j^0 = E_j/c > 0$.
- a função $\delta^4\left(p_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} p_i\right)$ garante que o momento e a energia se conservam.