

# 1 Largura de decaimento $\Gamma$

O *tempo de vida* ( $\tau$ ) é uma quantidade de enorme interesse entre os físicos, porém é impossível calculá-la a partir de uma única partícula, então o que se faz é determinar o tempo de vida *médio* a partir de uma amostra contendo  $N_0$  quantidades de uma mesma partícula. A probabilidade de decaimento por unidade de tempo denomina-se *largura de decaimento* ( $\Gamma$ ) e, a partir dela, é possível determinar a quantidade de partículas de uma amostra em função do tempo:

$$N(t + dt) - N(t) = dN(t) = -N(t)\Gamma dt$$

o que nos leva a:

$$\begin{aligned} \int_{N(0)}^{N(t)} \frac{dN'(t)}{N'(t)} &= - \int_0^t \Gamma dt' \\ \ln \left( \frac{N(t)}{N(0)} \right) &= -\Gamma t \\ N(t) &= N_0 e^{-\Gamma t} \end{aligned} \tag{1}$$

A fração de decaimento, em relação à amostra inicial, entre os períodos  $t$  e  $t + dt$  é:

$$\frac{N(t) - N(t + dt)}{N_0} = e^{-\Gamma t} \Gamma dt$$

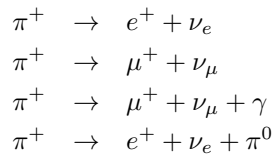
Logo, a probabilidade de uma partícula escolhida ao acaso na amostra inicial decair entre os instantes  $t$  e  $t + dt$  é:

$$p(t) = e^{-\Gamma t} \Gamma$$

de modo que o tempo de vida médio fica:

$$\begin{aligned} \tau &= \langle t \rangle = \int_0^\infty t e^{-\Gamma t} \Gamma dt \\ &= \Gamma \left( t \frac{e^{-\Gamma t}}{-\Gamma} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-\Gamma t}}{\Gamma} dt \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma} \end{aligned} \tag{2}$$

Naturalmente, uma mesma partícula pode apresentar múltiplas larguras de decaimento, dado que pode decair de diferentes formas, chamamos estas de larguras parciais. Um exemplo seria o  $\pi^+$ , cujos decaimentos conhecidos são:



Nesses casos, a largura de decaimento e o tempo de vida ficam:

$$\Gamma_{tot} = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \quad (3)$$

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_{tot}} \quad (4)$$

onde  $n$  é o número de decaimentos possíveis.

A *meia-vida* ( $t_{1/2}$ ) é facilmente calculada:

$$\begin{aligned} N(t_{1/2}) &= \frac{1}{2}N(0) = N(0)e^{-\Gamma t_{1/2}} \\ &\Downarrow \\ -\Gamma t_{1/2} &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow t_{1/2} = \frac{1}{\Gamma} \ln 2 = \tau \ln 2 \end{aligned} \quad (5)$$

Portanto, a partir da largura de decaimento é possível determinar o tempo de vida e a meia-vida de uma partícula, por isso, é essencial que exista um modelo que permita obter uma fórmula para  $\Gamma$ . A partir da QFT, pôde-se determinar que uma partícula  $\mathbf{1}$  decaindo em  $\mathbf{n}$  outras apresenta a seguinte largura de decaimento:

$$\Gamma = \frac{S}{2\hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4 \left( p_1 - \sum_{i=2}^n p_i \right) \times \prod_{j=2}^n 2\pi \delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(p_j^0) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4} \quad (6)$$

onde  $\mathcal{M}(p_1, \dots, p_n)$  é a *amplitude* do processo,  $p_j$  é o quadrivetor momento-energia e  $S$  é um fator de correção estatística que evita a contagem repetida de partículas idênticas obtidas no decaimento:

$$S = \prod_{i=1}^l \frac{1}{N_i!}$$

onde  $l$  é o número de partículas distintas formadas no decaimento e  $N_i$  é a quantidade de cada uma dessas diferentes partículas. Então, se não houver partículas idênticas  $S = 1$ ; enquanto que o processo  $A \rightarrow B + B + C + C + C + D$  tem  $S = (1/2!)(1/3!)$ .

A equação (6) revela três restrições cinemáticas:

- a função  $\delta(p_j^2 - m_j^2 c^2)$  mostra que todas as partículas (reais) que saem são *on shell*, ou seja, obedecem a relação relativística entre momento e energia  $E_j^2 - \vec{p}_j^2 c^2 = m_j^2 c^4$ .
- a função *heaviside*  $\theta(p_j^0)$  garante que  $p_j^0 = E_j/c > 0$ .
- a função  $\delta^4 \left( p_1 - \sum_{i=2}^n p_i \right)$  garante que o momento e a energia se conservam.