1 Eletrodinâmica Quântica: a Teoria de Gauge Abeliana

Quando lidamos com mais de um campo fermiônico de mesma massa, escrevemos a Lagrangiana livre de intereação, em unidades naturais ($c = 1$ e $\hbar = 1$), como:

$$\mathscr{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{1}$$

onde ψ corresponde a um multipleto de férmions.

Analisando (1) fica claro que essa Lagrangiana exibe simetria $U(N)$ global, o que equivale a dizer que

$$\psi \longrightarrow U\psi, \quad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}U^\dagger \tag{2}$$

sendo U a matriz unitária $N \times N$ que mantém a (1) invariante. Mas devemos lembrar que toda matriz unitária pode ser escrita como a exponencial de uma matrix Hermitiana:

$$U = e^{iH}, \quad H^\dagger = H \tag{3}$$

e todas as matrizes Hermitianas de dimensão N são combinações lineares de $N^2 - 1$ matrizes t_i e da identidade:

$$H = \theta\mathbb{I} + \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\alpha} \tag{4}$$

Na linguagem da teoria de grupos dizemos que $U(N) = U(1) \otimes SU(N)$, dessa forma, reescrevendo a (3)

$$U = e^{i\theta}e^{i\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\alpha}} \tag{5}$$

percebemos claramente que $\boldsymbol{t}$ são os geradores de $SU(N)$.

Sabemos que a QED é uma teoria que exibe simetria $U(1)$ local:

$$\psi \longrightarrow e^{i\theta(x)}\psi \tag{6}$$

portanto não existem geradores de $SU(N)$ na QED, tornando-a uma teoria de gauge abeliana.

Isso nos obriga a definir uma derivada covariante D_μ que substituirá ∂_μ em (1) para torná-la invariante de gauge por transformações $U(1)$ locais:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu \tag{7}$$

que se utiliza de um campo vetorial, cuja transformação é:

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \tag{8}$$

sendo e a constante de acoplamento, equivalente ao módulo da carga do elétron.

A transformação (8) mantém a Lagrangiana (1) invariante. Mas esse procedimento gera um vínculo: a derivada covariante introduziu um campo bosônico

A_μ na teoria, portanto deve-se acrescentar à (1) a Lagrangiana livre desses bósons. A Lagrangiana de Proca descreve os campos vetoriais:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A^\nu A_\nu \tag{9}$$

O termo $\frac{m^2}{2}A^\nu A_\nu$ não é invariante quando A_ν se transforma segundo (8), logo o bóson de gauge A_μ deve ter massa nula para satisfazer a invariância local. Dizemos, portanto, que a manifestação de campos vetoriais na teoria nos obriga a incluir o termo cinético dos bósons na Lagrangiana inicial.

Além disso, a invariância de gauge no termo cinético de (9) ocorre se

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{10}$$

termo já visto nas equações de Maxwell da eletrodinâmica clássica.

Ou seja, A_μ é o fóton.

A Lagrangiana completa da teoria é

$$\mathscr{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{11}$$