1 Simetrias de Sabor, Spin e Cor

Quando estudamos as simetrias de sabor, lidamos com as partículas no espaço de isospin. Heisenberg foi quem primeiro propôs que deveria existir alguma simetria entre partículas cujas massas de repouso eram indiscutivelmente próximas; foi assim que ele sugeriu que prótons e nêutrons deveriam ser estados diferentes de uma mesma partícula quando estudadas em um espaço interno, o qual ele denominou de espaço de isospin, pois a álgebra foi desenvolvida em completa analogia com o a do spin.

Nesse sentido, podemos colocar prótons e nêutrons em um dubleto, o nucleon, com a seguinte definição:

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha p + \beta n \tag{1}$$

sendo p o estado de isospin $I_3 = 1/2$ e n o estado de $I_3 = -1/2$. Dessa maneira, o nucleon se transforma por uma representação bidimensional do grupo de simetria $SU(2)$.

$$N \longrightarrow e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{I}} N$$

Píons, por sua vez, podem ser arranjados em um tripleto de isospin $I = 1$ que se transforma por representação tridimensional de $SU(2)$:

$$\pi^+ = |1 \;\; 1\rangle, \quad \pi^0 = |1 \;\; 0\rangle, \quad \pi^- = |1 \;\; -1\rangle \tag{2}$$

Temos aqui um fato importante: sabemos que prótons e nêutrons constituem o núcleo atômico e que essas partículas nucleares interagem constantemente por troca de píons, numa interação essencialmente ditada por forças fortes. Como as *transformações* $SU(2)$ *no espaço de isospin mantêm as interações fortes inalteradas*, ou seja a Lagrangiana dessas interações é invariante sob rotações no espaço de isospin, o teorema de Noether garante que o *isospin é conservado em todas as interações fortes*.

Se considerarmos um modelo de 2 sabores de quarks, up ($2.3^{+0.7}_{-0.5}$ MeV) e down ($4.8^{+0.5}_{-0.3}$ MeV), e dispusermos ambos em um único dubleto no espaço de isospin, teremos:

$$u = |1/2 \;\; 1/2\rangle, \quad d = |1/2 \;\; -1/2\rangle, \quad \bar{u} = |1/2 \;\; -1/2\rangle, \quad \bar{d} = |1/2 \;\; 1/2\rangle \tag{3}$$

Com isso, é possível criar estados compostos *quark-antiquark*:

$$\left.\begin{aligned} |1 \;\; 1\rangle &= -u\bar{d} \\ |1 \;\; 0\rangle &= (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2} \\ |1 \;\; -1\rangle &= d\bar{u} \end{aligned}\right\} \text{Iso-tripleto} \tag{4}$$

$$\left.|0 \;\; 0\rangle = (u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}\right\} \text{Iso-singleto} \tag{5}$$

Esse modelo de mésons-leves é o mais simples que podemos criar, mas é sabido que não são apenas os quarks *up* e *down* que constituem um méson. À época da descoberta do quark *strange* (95 ± 5 MeV), de segunda geração, precisou-se reformular o modelo de mésons, pois a simetria $SU(2)$ de isospin já não se aplicava ao novo modelo. Foi preciso dispor os três quarks em um tripleto, e para isso admitiu-se que o isospin era apenas uma manifestação de uma simetria maior $SU(3)$, ou seja, o quark *strange* tem $I = 0$. É importante ressaltar que trata-se de uma simetria aproximada, pois o quark *strange* tem massa muito superior ao *up* e ao *down*.

A partir disso, as combinações possíveis de pares *quark-antiquark* geram, além da configuração (4) de $I = 1$, novas configurações de $I = 1/2$ e $I = 0$:

$$I = \frac{1}{2}: \quad K^+ = u\bar{s} \quad K^0 = d\bar{s}, \quad \bar{K^0} = -s\bar{d}, \quad K^- = s\bar{u} \tag{6}$$

$$I = 0: \quad \eta = \frac{u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}}{\sqrt{6}}, \quad \eta\prime = \frac{u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}}{\sqrt{3}} \tag{7}$$

de modo que ao combinarmos todas essas configurações teremos um noneto de mésons, que pode ser subdividido em um octeto de $SU(3)$ e um singleto de $SU(3)$ (no caso o $\eta\prime$). Na linguagem da teoria de grupos: $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$.

As configurações (6) e (7) admitem que todos os mésons envolvidos estão no estado singleto de spin, de modo que o spin total da combinação é zero; mésons de spin nulo são chamados *mésons escalares*, pois são invariantes por transformações $U(2)$. Se os mésons estivessem no estado de tripleto de spin, então o spin total seria igual a 1 e geraria um noneto de *mésons vetoriais*.

Quando lidamos com bárions precisamos ser mais cautelosos, pois esses hádrons permitem a combinação de férmions idênticos e isso nos obriga a levar em conta o *princípio de exclusão de Pauli*, que tem a seguinte implicação:

Bóson (spin inteiro): $\psi(1, 2, \cdots, i, j, \cdots, n) = \psi(1, 2, \cdots, j, i, \cdots, n)$
Férmion (spin semi-inteiro): $\psi(1, 2, \cdots, i, j, \cdots, n) = -\psi(1, 2, \cdots, j, i, \cdots, n)$

Essa regra é válida para a função de onda total. Até os anos sessenta acreditava-se que ψ fosse da forma

$$\psi = \psi_{(espacial)} \cdot \psi_{(spin)} \cdot \psi_{(sabor)} \tag{8}$$

mas, no caso de alguns bárions específicos, isso levava a um sério problema: a violação do princípio de exclusão de Pauli.

Para entender a violação devemos partir do caso mais simples, o estado fundamental do bárion. Nesse estado não há momento angular interno, isto é, os quarks não giram em torno de um centro de momentos. Sendo assim, o número quântico referente ao momento angular orbital é nulo, $l = 0$, o que significa dizer que $\psi_{espacial}$ é simétrica. Sabemos ainda que o spin tem simetria $SU(2)$ e que o estado de spin de cada quark é um dubleto de *spin up* e *spin down* que se transformam segundo representações bidimensionais do grupo de simetria. Por isso, o estado de spin dos bárions estão dentro de uma representação de dimensão $2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2$, já que a regra da soma do momento angular garante que os estados compostos terão $S = 3/2$ ou $S = 1/2$ na seguinte disposição:

$$\left.\begin{array}{l} |\frac{3}{2}\ \ \frac{3}{2}\rangle = \ \uparrow\uparrow\uparrow \\ |\frac{3}{2}\ \ \frac{1}{2}\rangle = (\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow)/\sqrt{3} \\ |\frac{3}{2}\ \ -\frac{1}{2}\rangle = (\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow)/\sqrt{3} \\ |\frac{3}{2}\ \ -\frac{3}{2}\rangle = \ \downarrow\downarrow\downarrow \end{array}\right\}\text{simétrico} \tag{9}$$

$$\left.\begin{array}{l} |\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\rangle = (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\uparrow/\sqrt{2} \\ |\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\rangle = (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\downarrow/\sqrt{2} \end{array}\right\}\text{anti-simétrica em } ① \longleftrightarrow ② \tag{10}$$

$$\left.\begin{array}{l} |\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\rangle = \ \uparrow(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)/\sqrt{2} \\ |\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\rangle = \ \downarrow(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)/\sqrt{2} \end{array}\right\}\text{anti-simétrica em } ② \longleftrightarrow ③ \tag{11}$$

É possível ainda fazer um dubleto antissimétrico em ① ⟷ ③, mas ele não é independete, pois trata-se da combinação linear de (10) e (11).

Por fim, analisando $\psi_{(sabor)}$ verificamos que trata-se de uma combinação $3 \otimes 3 \otimes 3$, pois o estado de sabor do quark tem simetria aproximada de $SU(3)$, e de uma maneira totalmente análoga ao que foi feito para encontrar as representações de sabor dos mésons concluiríamos que $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$, onde o decupleto é uma representação totalmente simétrica, um dos octetos é anti-simétrico em ① ⟷ ②, o outro octeto é anti-simétrico em ② ⟷ ③ e o singleto é totalmente antissimétrico.

Agora temos todas as ferramentas para analisar o problema da violação do princípio de exclusão de Pauli. Primeiro é preciso notar que o spin dos bárions é sempre semi-inteiro (3/2 ou 1/2), ou seja eles são férmions e, por isso, devem apresentar função de onda totalmente antissimétrica.

Se analisarmos somente o decupleto de bárions verificamos que todos os seus elementos têm $S = 3/2$ e sabemos por (9) que esse estado de spin corresponde ao quadripleto totalmente simétrico. Sendo assim:

$$\psi_{10} = \psi^{+}_{(espacial)} \cdot \psi^{+}_{(spin)} \cdot \psi^{+}_{(sabor)} = \psi^{+}$$

onde o sinal "+"refere-se a uma função de onda simétrica.

Da mesma forma, os elementos dos octetos de bárions têm $S = 1/2$ e sabemos por (10) e (11) que esses estados de spin são misturas antissimétricas. Então:

$$\psi_{8} = \psi^{+}_{(espacial)} \cdot \psi^{-}_{(spin)} \cdot \psi^{-}_{(sabor)} = \psi^{+}$$

Em ambos os casos esperávamos uma função de onda antissimétrica e obtivemos uma simétrica. O singleto de bárions corresponde a uma partícula que não existe no estado fundamental, então não se enquadra na nossa discussão.

A solução veio em 1964 quando Greenberg, Nambu e Han introduziram o número quântico de cor aos quarks. Com isso, aparecia uma outra função de onda $\psi_{(cor)}$ *totalmente antissimétrica* que precisava entrar na equação (8) e que resolvia o problema da violação do princípio de exclusão de Pauli para os bárions.

Como nenhum experimento tinha detectado presença de partículas dotadas dessa "cor"na natureza, então postulou-se que essas partículas apareciam na natureza como brancas (tradução livre de *colorless*). O motivo pela escolha do nome "cor"vem da sugestão de que existissem três cores (R, G, B) com a seguinte propriedade: todas elas aparecem nos bárions deixando-os brancos (colorless), enquanto uma cor e sua respectiva anti-cor aparecem nos mésons, também deixando-os brancos.

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pensar na existência de três cores pressupõe que o grupo de simetria envolvido seja $SU(3)$, em completa analogia com a simetria de sabor com a diferença que para a cor a simetria é exata. Dessa maneira, apenas fazendo a mudança $u \leftrightarrow R$, $d \leftrightarrow G$ e $s \leftrightarrow B$ chegamos na representação $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$ para bárions e $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$ para mésons. Em ambas as representações, o singleto é o estado que não tem cor, análogo ao singleto de spin que apresenta $S = 0$, e portanto concluímos que *na natureza hádrons aparecem como singletos de cores.*

No caso dos bárions, o singleto de $SU(3)_c$ é a única representação totalmente antissimétrica, e precisávamos que $\psi_{(cor)}$ apresentasse justamente essa simetria para não violar o princípio de exclusão de Pauli.